因果对称的经典质点动力学方程*

陈驰一 1)†

1)（杭州师范大学物理学院， 杭州，310036）

摘要：本文首先还原了基于大量力学实验的真正经验规律，从中获得质点动力学的因果关系。其次，通过因果对称和一致的基本要求，在牛顿动力学的框架下引入了对称形式的新质点动力学方程。新方程可以直接适用于任意平动的参考系，之所以对称是因为待考察的运动物体和参考物体完全被置于了同等的地位。当参考物的真实受力恒为零时，对称新方程即退化到牛顿第二定律，而此时的参考系也即对应为惯性系。因为参考系的加速直接取决于参考物的加速，而参考物的加速直接取决于参考物的受力，因此，惯性力的本质揭示为质量平权后的参考物的真实受力，且这一定性解释是普适的。而对于平动参考系，惯性力的定性解释可以通过具体的理论计算表达式得到进一步明确。理论分析表明，对称新方程可以自然地融合经典力学的理论框架，且比牛顿第二定律更加符合实验和经验规律。最后，在此基础上，我们通过具体的例子全方位地比较分析了对称新方程在应用上的优势。

关键词： 牛顿动力学； 对称新方程； 惯性力； 适度相对性原理

PACS： 98.80.-k, 95.10.-a

† E-mail: chenchiyi@hznu.edu.cn WeChat-Mobile：13634144631

1　为什么要进一步改进牛顿动力学的传统表述

牛顿动力学是一个很成熟的理论[1]。但是即便如此，其理论框架本身仍然有不完美的地方[2]。首先，作为动力学基本规律的牛顿第二定律只能在惯性系适用，但是实际的参考系却都不是惯性系。其次，当牛顿第二定律的运动学部分通过参考系变换表述到非惯性系时，发现其相比牛顿第二定律的标准理论额外多出一个所谓的惯性力[1]，而这个惯性力是由这个非惯性系和只有理论上存在的惯性系之间的运动学给出。因此惯性力不是真实的受力，而是传统教材普遍认为的虚拟力[3]。长期以来，惯性力的本质令人困惑，一直存在争论和争议[4]。甚至到近代，爱因斯坦是通过假定惯性力和引力的物理等效（爱因斯坦强等效原理）构建了广义相对性原理[2,5,6]，广义相对性原理是爱因斯坦广义相对论得以如此命名的由来[7]。

惯性力的物理本质的长期悬而未决[8,9]，从反面暗示了牛顿第二定律并没有真实反映非惯性系（作为实际参考系）中动力学物理的微妙逻辑关系[10,11]。换句话讲，即便在经典力学的原有框架下，质点动力学仍然有可能存在比牛顿第二定律更好的规律表述。

在经典力学的传统体系中，质点动力学由牛顿第二定律来表述，数学公式如下：

$$\boldsymbol{F}\big|_p = m_p\,\boldsymbol{a}\big|_{p-\Sigma} \tag{1}$$

其中 p 为待考察的运动质点，m_p 表示质点 p 的质量，Σ 为惯性系；$\boldsymbol{F}\big|_p$ 表示质点 p 所受到的全部作用力的矢量和，$\boldsymbol{a}\big|_{p-\Sigma}$ 表示质点 p 相对惯性系 Σ 的加速度。牛顿第二定律只能在惯性系适用，牛顿动力学的传统表述满足的是伽利略力学相对性原理 [1,2]，即牛顿第二定律在任何惯性参考系中数学形式不变。但现实的问题是，实际的参考系都不是严格的惯性系。因此，牛顿第二定律不能适用于实际的参考系（这里用 O 来标记非惯性系）。如果硬要套用牛顿第二定律的数学表述，可以通过对牛顿第二定律的数学变形[1]来接近（对参考系的运动学部分作变换）；下面由 $\boldsymbol{r}\big|_{p-o}$ 表示质点 p 相对参考原点 o 的空间有向线段（尚未有分量表示），$\boldsymbol{r}\big|_{p-O}$ 表示质点 p 相对参考系 O 的空间位置矢量(矢量在参考系中则可默认为分量表示)，$\boldsymbol{e}_i\big|_O$ 表示参考系 O 的**直角坐标轴**基矢（这里只考虑参考系客观转动的影响，故不选取质点的主观运动导致基矢变化的坐标轴例如自然坐标系极坐标系等），任何时刻，空间有向线段可按任何参考系 O 的基矢展开分量：$\boldsymbol{r}\big|_{p-o} \overset{\text{重复指标}}{\underset{i\text{求和}}{=}} \left(\boldsymbol{r}\big|_{p-o}\cdot\boldsymbol{e}_i\big|_O\right)\boldsymbol{e}_i\big|_O$，而在参考系中的空间位置矢量的定义式应该表示为：$\boldsymbol{r}\big|_{p-O} \equiv \left[\boldsymbol{r}\big|_{p-o}\cdot\boldsymbol{e}_i\big|_O\right]\boldsymbol{e}_i\big|_O$，参考系的转动只有在求空间矢量微分时才体现影响，因此在参考系中的速度和加速度矢量的定义式应该表示为（最基础微分基于数

量才可操作）: $\mathbf{v}\big|_{p-O}\equiv\left[\dfrac{d\left(\mathbf{r}\big|_{p-o}\cdot\mathbf{e}_i\big|_O\right)}{dt}\right]\mathbf{e}_i\big|_O\Rightarrow\mathbf{a}\big|_{p-O}\equiv\left[\dfrac{d^2\left(\mathbf{r}\big|_{p-o}\cdot\mathbf{e}_i\big|_O\right)}{dt^2}\right]\mathbf{e}_i\big|_O$；在任何运动的参考系$O$中，认为自身固连的直角坐标基矢$\mathbf{e}_i\big|_O$都是静止不动的，因此有一致的定义逻辑：

$\mathbf{a}\big|_{p-O}\equiv\left[\dfrac{d^2\left(\mathbf{r}\big|_{p-o}\cdot\mathbf{e}_i\big|_O\right)}{dt^2}\right]\mathbf{e}_i\big|_O\overset{O系固连}{\underset{观测者}{=}}\dfrac{d\,\mathbf{v}\big|_{p-O}}{dt}\overset{O系固连}{\underset{观测者}{=}}\dfrac{d^2\,\mathbf{r}\big|_{p-O}}{dt^2}$（因此，在转动参考系中，要特别注意衍生运动学量之间的分量关系并不能直接等同于矢量关系），因此对任意运动（平动+转动）的参考系O，由空间位置矢量对时间的二阶微分为

$$
\begin{aligned}
&\frac{d^2\mathbf{r}\big|_{p-o}}{dt^2}=\frac{d^2\left(\mathbf{r}\big|_{p-o}\cdot\mathbf{e}_i\big|_O\right)\mathbf{e}_i\big|_O}{dt^2}=\frac{d^2\left(\mathbf{r}\big|_{p-o}\cdot\mathbf{e}_i\big|_O\right)}{dt^2}\mathbf{e}_i\big|_O+2\frac{d\left(\mathbf{r}\big|_{p-o}\cdot\mathbf{e}_i\big|_O\right)}{dt}\frac{d\mathbf{e}_i\big|_O}{dt}+\left(\mathbf{r}\big|_{p-o}\cdot\mathbf{e}_i\big|_O\right)\frac{d}{dt}\left(\frac{d\,\mathbf{e}_i\big|_O}{dt}\right)\\
&\overset{刚体参考系转动}{\underset{\frac{d\mathbf{e}_i|_O}{dt}=\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{e}_i|_O}{=}}\left[\frac{d^2\left(\mathbf{r}\big|_{p-o}\cdot\mathbf{e}_i\big|_O\right)}{dt^2}\right]\mathbf{e}_i\big|_O+2v_i\big|_{p-O}\left(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{e}_i\big|_O\right)+\left(\mathbf{r}\big|_{p-o}\cdot\mathbf{e}_i\big|_O\right)\frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{e}_i\big|_O\right)\\
&=\mathbf{a}\big|_{p-O}+2\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}\big|_{p-O}+\left(\mathbf{r}\big|_{p-o}\cdot\mathbf{e}_i\big|_O\right)\left[\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\times\mathbf{e}_i\big|_O+\boldsymbol{\omega}\times\left(\frac{d\,\mathbf{e}_i\big|_O}{dt}\right)\right]\\
&=\mathbf{a}\big|_{p-O}+2\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}\big|_{p-O}+\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\times\mathbf{r}\big|_{p-O}+\boldsymbol{\omega}\times\left(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}\big|_{p-O}\right)
\end{aligned}
\qquad (2)
$$

由此得到牛顿第二定律在惯性系和加速参考系之间的变换，

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{F}\big|_p=m_p\frac{d^2\mathbf{r}\big|_{p-\Sigma}}{dt^2}\overset{伽利略变换}{\underset{记o为O原点}{\Rightarrow}}m_p\frac{d^2\left(\mathbf{r}\big|_{p-o}+\mathbf{r}\big|_{o-\Sigma}\right)}{dt^2}\overset{惯性系基矢}{\underset{不转动}{=}}m_p\left[\frac{d^2\left(\mathbf{r}\big|_{p-o}\right)}{dt^2}+\frac{d^2\left(\mathbf{r}\big|_{o-\Sigma}\cdot\mathbf{e}_i\big|_\Sigma\right)}{dt^2}\mathbf{e}_i\big|_\Sigma\right]\\
&\overset{以o为原点引入}{\underset{任意运动参考系O}{=}}m_p\left[\frac{d^2\left(\mathbf{r}\big|_{p-o}\cdot\mathbf{e}_i\big|_O\right)\mathbf{e}_i\big|_O}{dt^2}+\mathbf{a}\big|_{o-\Sigma}\right]=m_p\left[\mathbf{a}\big|_{p-O}+2\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}\big|_{p-O}+\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\times\mathbf{r}\big|_{p-O}+\boldsymbol{\omega}\times\left(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}\big|_{p-O}\right)+\mathbf{a}\big|_{o-\Sigma}\right]\\
&\overset{数学移项}{\Leftrightarrow}\ \mathbf{F}\big|_p-m_p\left[\mathbf{a}\big|_{o-\Sigma}+2\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}\big|_{p-O}+\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\times\mathbf{r}\big|_{p-O}+\boldsymbol{\omega}\times\left(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}\big|_{p-O}\right)\right]=m_p\,\mathbf{a}\big|_{p-O}
\end{aligned}
\qquad (3)
$$

上式最后一步在运动学部分强行凑出一个相对于非惯性系O的加速度表达式，然后方程的左边全部看作是力。从而形式上模拟到牛顿第二定律，但是这样一个表达式并不是真正意义上的动力学规律， 因为左边第二项不是真正的受力，作为一个虚拟力，惯性力（$\mathbf{f}\big|_{惯性力}$）的定义由此引入[1]；对任意运动（包括转动）的非惯性系O，惯性力定义的数学展开表达式为

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{F}\big|_p+\mathbf{f}\big|_{惯性力}=m_p\,\mathbf{a}\big|_{p-O}\\
&\mathbf{f}\big|_{惯性力}=-m_p\left[\mathbf{a}\big|_{o-\Sigma}+2\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}\big|_{p-O}+\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\times\mathbf{r}\big|_{p-O}+\boldsymbol{\omega}\times\left(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}\big|_{p-O}\right)\right]
\end{aligned}
\qquad (4)
$$

其中第一项$\boldsymbol{a}|_{o\text{-}\Sigma}$的数值只能依赖于参考质点相对于某个惯性系$\Sigma$的加速度的度量；后三项中$\boldsymbol{\omega}$的数值则只能依赖于实际参考系相对宇宙背景的转动的确定。可见，惯性力既不能像其他常见力那样通过理论公式计算，也不能实际测量（因为仍然需要以现实不存在的惯性系为前提）。正因为惯性力的定义展开式还是要求先找到一个惯性系Σ，因此，光是牛顿第二定律的运动学部分变换实际上并没有突破牛顿动力学的传统表述受限于惯性系的困境[2]。而在实际应用中，也无法参照绝对的空间来度量运动学量[5]，所以作力学分析时，只能直接选用近似的惯性系，若近似不足，甚至还要考虑惯性力的大小和方向。

值得指出的是，有人可能提出牛顿力学中质点动力学的更好形式是$\boldsymbol{F}|_p = d(\boldsymbol{p}|_{p\text{-}O})/dt$，而不是$\boldsymbol{F}|_p = m_p\,\boldsymbol{a}|_{p\text{-}O}$。而事实上，前式相比后式只多适用于一个变质量问题。经典低速情形下的变质量问题（比如火箭问题）的实质可以归结为质点系统中质点之间的分离和相对运动，而非单个质点的动力学。 因此，在牛顿力学中基本的质点动力学方程仍然是$\boldsymbol{F}|_p = m_p\,\boldsymbol{a}|_{p\text{-}O}$，至于$\boldsymbol{F}|_p = d(\boldsymbol{p}|_{p\text{-}O})/dt$可以看作是前式在推广到质点系时引入的一种有效形式。 在狭义相对论中， 质点动力学形式更倾向于$\boldsymbol{F}|_p = d(\boldsymbol{p}|_{p\text{-}O})/dt$，这是由于质点的质量可以发生变化，而其物理本源可以归结到光速不变原理[2]。但实际上即便在相对论力学[5]中，真正基本的出发点仍然是$F_\mu = m_0\, d^2x_\mu/d\tau^2$ ，由此才得到特定参考系下的相对论性动力学$\boldsymbol{f} = d\boldsymbol{p}/dt$。

质点动力学为什么不能直接建立在实际的参考系（标记为非惯性系O）上？或者说为什么在非惯性系O中牛顿第二定律的数学方程不成立？

$$\boldsymbol{F}|_p \,?\!\neq m_p\,\boldsymbol{a}|_{p\text{-}O}, \tag{5}$$

背后的原因到底是什么？是否有改进余地？实际上牛顿第二定律除了存在大家熟知的惯性系依赖和虚拟惯性力问题，还存在一个非常隐蔽的问题。在经典力学中，力是改变物体运动状态的原因，所以力是因，加速度是果；而（5）式的两边实际上存在最基本的因果不对称问题：从自然哲学上来讲，对于客观宇宙， 具体一个质点给定了，其某个时刻的受力状态也就给定了， 因此，若暂时不考虑受力的具体细节，以具体给定的质点为形式变量作形式逻辑上的分析，则有

$$\begin{cases} \dfrac{\boldsymbol{F}|_p}{m_p} \overset{\text{只分析形式变量}}{\underset{\text{暂不计算具体受力}}{\Longleftrightarrow}} \text{因}\ (p) \\ \boldsymbol{a}|_{p\text{-}O} \overset{O\text{是实际参考系}}{\underset{o\text{是对应的实际参考物}}{\Longleftrightarrow}} \text{果}\ (p,o) \end{cases}, \quad \text{而}p\text{和}o\text{的选取完全独立！} \tag{6}$$

因此， 牛顿第二定律对于实际参考系而言，其因果存在形式变量的不对称[12]。正是这一个原因导致了牛顿第二定律不能在实际的参考系适用，而只能在一个理想化的惯性系适用。

从（6）式可以看出，实际上牛顿第二定律遗漏了参考物的受力项。或许有人回顾之前传统的牛顿第二定律的应用， 参考系本身好像不一定需要参考物? 其实仔细去深究的话，不是那么回事。只要是真实的物理的应用，必须要用参考物，否则无法定义参考系的原点， 这点在选取非惯性系时特别明显，必须选定参考物是什么，才清楚非惯性系是什么。但是，在选取地面，或者实验室参考系时，这一点是非常隐蔽的，好像从来没有和具体参考物有关。根本原因正是这里的地面或实验室参考系被近似成为了惯性系，因此新形式的质点动力学方程中对应惯性力的那个参考物的受力项被忽略了，所以，感觉参考物可有可无。但实际上，即使在受力项部分把参考物给忽略了，但是加速度仍然必须是被考察物体相对实际的参考物来度量的。否则，就不存在找惯性系的问题。 因为一个物理的参考系才需要在真实世界中来寻找，存在是否可以找到的问题[1,2,3]。而一个数学的参考系 ，是定义范畴，不存在找不到的情形。在用地面(或实验室)参考系时，实际上是任意选取了地面(或实验室)中任意静止的物体作为了参考物。对加速度的度量是相对地面(或实验室)静止的任何一点进行的，实际上就是相对该点上静止的任意物体进行的，这时候的参考物，就是该点上静止的物体，原则上范围大小可以人为任意确定，只要能看作质点即可，因为当人们把地面(或实验室)参考系近似为惯性系以后参考物的质量等性质就对计算无关紧要。但是该点上必须有真实物体存在，否则无法真正落实物理度量（比如加速度）的有效性和可操作性。

总而言之，不管质点动力学的具体形式是什么，不管相对论性还是非相对论性，从自然哲学上讲，任意一个参考系的运动必然直接取决于定义它的参考物的运动，而进一步，参考物的加速运动直接取决于参考物的受力，因此，作为质点动力学方程，只要也只能建立在实际的参考系上， 故就必须引入参考物的受力项。 这是天经地义的因果性要求， 因此牛顿第二定律的形式改进是必要的，也是充分的。只要参考物的受力没有出现在动力学方程形式中，动力学方程就不可能推广到实际的参考系。本文即致力于从最真实的力学实验的经验规律出发重新梳理牛顿动力学的逻辑体系。

2 真正基于力学实验的经验规律

2.1 质点动力学的基本因果关系

“力是改变物体运动状态的原因”，普遍认为质点动力学是一个描述因果关系的理论，

但是由实验直接给出的定量的因果关系其实并不是牛顿第二定律（因为其适用条件为惯性系而不是实际的实验室参考系，此外，我们也从来没有对哪怕任何一个质点做到过对其全部受力的统计），而是可以大体表示为一个经验公式：

$$\Delta \boldsymbol{F} = m\Delta \boldsymbol{a} , \tag{7}$$

即对于一个被考察的物体相比前一个力学（平衡）状态，新增的受力 $\Delta \boldsymbol{F}$ 和由此导致的新增加速度 $\Delta \boldsymbol{a}$ 之间的线性因果关系，比例系数和物体的某种固有属性有关，即定义为质量。因此在质点动力学中，受力为“因”， 加速度应该为“果”。而牛顿第二定律应该理解为根据经验公式（7）式通过对受力的所有来源的统计“积分”而得到的理论公式[12]。所以，应该明确，牛顿第二定律虽然以定律的方式直接给出，但是其已经不是严格意义上的实验规律，作为理论公式，自然就有了改正的余地和空间。

2.2 质量和力的初始定义

实质上，力和质量的最初定义真正依赖的力学经验规律（7）式，而不是牛顿第二定律，因为牛顿第二定律不能在实验室参考系严格适用。首先在某个特定的实验室参考系中，通过某个特定设计的力学实验测量加速度来定义力的大小。其次在相同的力的作用下，被考察物体具有不同的加速度，这种加速度的差异定义为被作用物体具有不同的惯性，而对这种惯性的定量描述引入了惯性质量的定义。然后，根据特定的探索实验和（7）式，给出各种常见力的理论计算公式。由此，最终我们得到在新的一般场景中可以检验的动力学规律。因此，同样应该明确，动力学规律作为物理规律本身绝对是可以检验的物理规律，而不只是简单的力和惯性质量的定义式，当然最初的力和惯性质量的定义的确是借助了动力学规律在某些特殊设计（分离变量式）的实验场景的应用。

3　牛顿动力学的对称新方程

3.1 对称新方程基于力学经验规律在合理自然哲学下的必然推导

根据前面的讨论，由力学实验直接给出的定量因果关系其实是一个经验公式：$\Delta \boldsymbol{F} = m\Delta \boldsymbol{a}$，由此得到受力是因，加速度是果，但是根据对牛顿第二定律的形式逻辑的分析，牛顿第二定律不满足基本的因果对称和一致的要求。 那么根据动力学在因果两端保证对称和一致的基本要求，对于一个质点所受到的来自整个宇宙的全部受力，其对应的果应该怎么来表示呢？在某个时刻，质点的全部受力也就是一个质点的受力状态应该是客观

的，不随参考系选择的变化而变化。 所以与此相对应的果，也必须是客观的，不能和任何参考系有关。所以一个质点的和参考系无关的加速度只能表示为在宇宙空间的背景中的加速度[13]，

$$\boldsymbol{F}\big|_p = m_p \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\Omega\big|_p 。\tag{8}$$

这里专门用特殊符号$\Omega\big|_p$表示质点p在宇宙空间的背景中的客观位置。这里的 “背景”的物理含义是指宇宙中扣除所有可演化可移动万物之后留下的恒久不变的虚空存在。按通常认知，宇宙空间的背景就是三维真空（无任何物质，无任何能量，包括量子激发态的基态能）。这里的“客观”的物理含义是指不受人的意识和参考系的选择而改变。正因为宇宙空间的背景是虚空（空无一物），不是任何具体形式的物质或能量，因此自然没有任何相互作用可以影响到它，所以这里认定宇宙空间的背景是绝对的，作为基本假定是非常自然的。也因此，这里只提议质点在宇宙空间的绝对背景中的位置是客观的。值得强调的是，真实质点在任何时刻在宇宙背景中具有客观的位置是上述（8）式成立的必要但最精简的条件，而（8）式实际上也是质点动力学摆脱惯性系依赖的必要基础。

需要说明的是，这里提议的宇宙空间的绝对背景并不和狭义相对论的实证逻辑冲突。首先，狭义相对论的洛仑兹变换给出的是不同惯性系中观察同两个事件的时间或者空间的间隔的数值变换关系，但其实间隔的长度要能够实现比较，一定需要背景来衬托的。其次，详细审查狭义相对论中的逻辑演绎，可以发现关于绝对背景的隐含逻辑在狭义相对论中也同样需要：正因为事件（event）在时空的背景中具有客观的位置，同一个事件在不同惯性系中的坐标值才能通过洛伦兹变换联系起来[2, 3, 5]。因此，时空的概念应该作进一步的细分，分为时空的背景和时空的标度[12, 13, 14]。其中时空的标度是时空基本单位的长度，根据具体物质中固有的自然物理周期现象定义[15]，既然是具体物理现象，自然可以受到各种基本相互作用的影响， 所以，时空标度出现相对性也是非常自然的。而时空的背景作为衡量时空标度的长短变化的必备基础和参考背景，所以在选取上必须是绝对的，根据前面的论述，宇宙时空的背景不参与任何形式的相互作用正好是绝对的，因此，绝对的时空背景和相对的时空标度实际上是相辅相成，对立统一的辩证关系，构成了时空和谐统一的基本物理图像[14]。

尽管任何质点在宇宙空间背景中的位置可以真实感知，但是质点在宇宙空间背景中的客观位置则不能直接度量。我们真正能够度量的是两个客观位置之间的差异，比如两个物体p和o，其客观上构成一个在三维空间上截取的有向线段：

$$\boldsymbol{r}\big|_{p-o}=\Omega\big|_p-\Omega\big|_o 。\tag{9}$$

宇宙中任何物体在最基本的动力学规律上都应该是等价的。 包括任意待考察的物体 p 和实际的参考物 o ，都满足同样的基本动力学。因此对参考物 o ，其动力学也应该满足：

$$\boldsymbol{F}\big|_o=m_o\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\Omega\big|_o 。\tag{10}$$

这里时空的标度可以在选取参考物之后自然地由参考物上的固有周期物理现象来定义。但注意，当目前为止尚只引入一个参考物 o ，因此还没涉及到参考系之间时空标度的变换法则问题。选择参考系的本质就是为了对运动作相对度量，作为因果对应，受力也自然具有相对性。其中参考物 o 通常可以自然地对应到参考系的参考原点，由此建立相对宇宙空间的（绝对）背景无转动的参考系 O（即为平动参考系）。在引入参考系 O 之后，任何时刻物体 p 和 o 在宇宙空间背景中的客观位置在三维空间上所“截取”的有向线段，自然构成为一个（质点 p 在参考系 O 中的）位置矢量，即 $\left(\boldsymbol{r}\big|_{p-o}\right)_{\text{宇宙空间背景}}=\boldsymbol{r}\big|_{p-O}$ 。最后化简得到一个对任意的参考物 o，任意的平动参考系 O 都适用的质点动力学方程[13]（方程右边可看作受力的相对统计）：

$$\frac{\boldsymbol{F}\big|_p}{m_p}-\frac{\boldsymbol{F}\big|_o}{m_o}=\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}[\Omega\big|_p-\Omega\big|_o]=\frac{\mathrm{d}^2\left(\boldsymbol{r}\big|_{p-o}\right)_{\text{宇宙空间背景}}}{\mathrm{d}t^2}=\left(\boldsymbol{a}\big|_{p-o}\right)_{\text{宇宙空间背景}}=\boldsymbol{a}\big|_{p-O}\tag{11}$$

其中加速度的定义，受力的定义和牛顿力学的传统理论完全一致。方程（11）表示的就是质点 p 在任意平动的参考系 O 中的动力学基本方程。在(11)式中，任何待考察的物体和任何参考物体都被置于了完全平等的地位。这是符合实际的。因为什么物体被选为待考察的物体，什么物体被选为参考物体，都是人为意识指定的，并没有绝对的本质的划分。更重要的是，从因果一致原理的角度分析，我们将看到，所谓的惯性力的本质就是参考物体所受到的真实力，其实这更是一个令人霍然开朗的自然结果，因为参考系的运动直接且唯一取决于定义它的参考物的运动，而参考物的运动则直接且唯一取决于参考物的受力。

根据本节的逻辑推演，质点动力学方程的相对性原理得以推广的关键在于最基本的因果对称和一致的要求。而中间的理解性推导则以存在宇宙空间的绝对背景为逻辑基础。这里再次强调，绝对的时空背景和相对的时空标度和谐统一的基本物理图像在爱因斯坦的狭义相对论和广义相对论的最基础物理图像中也是逻辑隐含的[14]（尽管和现有理论的声称部分并不相符）。首先，在狭义相对论的逻辑推演中，所有的事件（event）不管在什么惯性系之间变换，都被假定在空间有一个客观位置[2,5]。否则就得不到洛伦兹坐标变换公式。这里的客观位置实质上就可以看作是事件的发生点在时空的绝对背景中的反映。其次，在广义相对论的物理图

像中，引力会导致时钟的延缓，长度的收缩。即原本由观测者定义的标准钟和标准尺的长度由于引力场的存在发生了变化。但是深入反思，这种标准尺，标准钟的长度的变化是通过什么体现出来的？只有存在一个绝对背景，长度的变化才能体现出来，也才有客观的意义。落到实处讲，标准尺的长度就是定义标准尺的具体物理事件在空间背景中截出来的空间线段，而在不同引力场中的标准尺在空间背景中截取的空间线段是不相等的。因此，时空的绝对背景和时空的相对标度在物理图像上可以是相容的，而且构成互补。

3.2 对称新方程基于牛顿第二定律在绝对背景视作惯性系下的必然推导

物理学上真正有用的参考系是建立在实际的参考物上，至少其参考原点是建立在真实的参考物上。这是牛顿动力学之所以能够从理想的惯性系拓展到实践中普遍的平动参考系的关键。即便对于质心参考系，其也相当于选取了整个系统中的所有质点作为参考物，只是在确定代表性参考质点的空间位置上作了数学处理（即引入质心坐标定义式）。本质上，什么被选为被研究的物体，什么被选为参考物，是我们人类意识做出的人为选择，在物理的根本法则层面上，被研究物体和参考物完全处于同等的地位。根据这一深刻认识，并考虑到理论上存在一个惯性系Σ，在经典力学的牛顿第二定律法则下，被研究物体p和参考物o本质上服从动力学同样的因果规律

$$\boldsymbol{F}\big|_p = m_p\,\boldsymbol{a}\big|_{p-\Sigma} \tag{12}$$

$$\boldsymbol{F}\big|_o = m_o\,\boldsymbol{a}\big|_{o-\Sigma} \tag{13}$$

再引入平动参考系O是以任意实际的参考物o为参考原点（约定：相对性物理量的下标中，本文以小写字母标记具体物体或质点，以大写字母标记参考系）；$\boldsymbol{F}\big|_p$和$\boldsymbol{F}\big|_o$分别表示质点p和o的全部受力，原则上直接根据质点各自的属性和现有的常见力的理论公式计算。上述等式两边均除以各自质量后两式相减，再引用惯性系和平动参考系之间的变换：

$$\boldsymbol{a}\big|_{p-\Sigma} - \boldsymbol{a}\big|_{o-\Sigma} = \left(\boldsymbol{a}\big|_{p-o}\right)_{\Sigma} = \boldsymbol{a}\big|_{p-O}, \tag{14}$$

最后一步即要求O是不自转的平动参考系，即O相对惯性系Σ不存在坐标轴的转动。其中$\left(\boldsymbol{a}\big|_{p-o}\right)_{\Sigma}$是质点$p$和$o$之间的相对加速度（默认在惯性系$\Sigma$中），等价于在以$o$为参考原点的相对宇宙空间背景不转动的平动参考系$O$中的加速度$\boldsymbol{a}\big|_{p-O}$。而$\boldsymbol{a}\big|_{p-O}$正是实践中普遍定义的质点$p$在实际平动参考系$O$中的加速度。由此，牛顿动力学在无需任何额外假定，在现有的

理论框架下就可以必然地推导一个直接在平动（相对宇宙空间的背景不自转）参考系适用的表述形式，

$$\frac{\boldsymbol{F}|_p}{m_p}-\frac{\boldsymbol{F}|_o}{m_o}=\boldsymbol{a}|_{p-O} \tag{15}$$

由此，本节通过牛顿第二定律的独立推导再次重新证明了牛顿动力学的对称新方程（11）式。而在对称新方程中，p 和 o 的位置对称，可以互换而保持方程不变。正好符合了前面指出的 p 和 o 在动力学根本法则上具有同等地位的自然哲学原理。

显然牛顿动力学的对称新方程的适用范围是任意的平动参考系，而牛顿第二定律的适用范围是任意的惯性系。那么为什么从适用范围小的牛顿第二定律可以推导适用范围更广的对称新方程呢？首先，从推导过程可以看出，宇宙空间的绝对背景在推理效果上就相当于一个无法实际用作参考的特殊"惯性系"，而其他的推导步骤完全雷同，因此，从牛顿第二定律也能逻辑必然地推导出对称新方程。这并不奇怪但是不符合常规的理解。 其次，从数学上来看，力学实验的经验规律（7）式可以进一步表示为微分方程：$\mathrm{d}\boldsymbol{F}=m\mathrm{d}\boldsymbol{a}$ 。但是经验规律必须要上升为理论公式，而理论公式中的受力项必须统计质点的全部受力。因为如果不是这样，公式每次换一个新的场合应用时，就不知道哪些力应该考虑进去，哪些力不应该考虑进去。所以，理论的质点动力学方程只能面向和处理质点的全部受力，也因此质点动力学的理论形式相当于根据受力的统计来源和由此导致的加速度对微分方程（$\mathrm{d}\boldsymbol{F}=m\mathrm{d}\boldsymbol{a}$）的两边作因果对应的"定积分"。数学上的定积分都是末态减去初态（纵向的参考），而这里"定积分"是待考察物体的态减去被参考物体的态（横向的参考）。所以， 从这个意义上来讲，牛顿第二定律相当于在动力学的"定积分"过程中遗漏了被参考物体的受力态。 再根据数学的定积分性质，方程左边如果遗漏一个初态项，严格地讲等式就不再成立（物理上则指牛顿第二定律应用到实际非惯性系不能成立），但是把"拐脚的"方程应用两遍，再作相对扣除，就又能自然地回到正确的表达式。从这个数学本质的类比可以帮助我们更好地理解牛顿第二定律和对称新方程的微妙关系。

3.3 惯性系的概念保留为参考物的受力恒为零的参考系

显然当牛顿动力学的对称新方程（11）式在

$$\boldsymbol{F}|_o\equiv 0, \tag{16}$$

即参考物的全部受力的合力恒为零时，对称新方程就立即自然地回到了惯性系下的牛顿第二

定律[12,13]。因此， 真正的实质应该是牛顿第二定律才是对称新方程的（极端）特例。而惯性系也因此有了真正的属性定义，即参考物的受力恒为零的参考系。在以对称新方程核心的牛顿动力学理论体系下，惯性系的概念可以得到保留，但是质点动力学的应用不再必须依赖惯性系。而在牛顿动力学的传统体系中， 通常认为惯性系是由牛顿第一定律定义的，即牛顿第一定律在其中成立的参考系叫惯性系。事实上， 这是一种动力学的定义，需要经过动力学规律的检验才能确认。除此之外，惯性系在传统体系中没有纯运动学或者纯力学的定义。而现在，通过在平动参考系直接适用的对称新方程的引入，我们对惯性系的概念引入了纯力学的定义。

3.4 惯性力的本质揭示为质量平权后的参考物的真实受力

根据牛顿动力学的传统表述， 惯性力的概念是通过对牛顿第二定律的运动学变换而得到， 其数学表达式由（4）式给出。因为（4）式本质上是由参考系之间的相对运动和运动学量给出，并且仍然局限于对惯性系的依赖。原则上必须要找到严格的惯性系，才能真正通过运动学的度量得到惯性力的数值。所以，在传统教材中，惯性力往往被描述成一种虚拟力，只有受力物体，没有施力物体[1,3]。

现在，对于平动参考系下的惯性力，通过对平动参考系中的牛顿第二定律的运动学变换，进而和牛顿动力学的对称新方程比较，我们得到了惯性力的理论计算表达式：

$$\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{F}\big|_p = m_p \boldsymbol{a}\big|_{p-\Sigma} \overset{\text{引入平动}}{\underset{\text{参考系}O}{\Rightarrow}} \boldsymbol{F}\big|_p = m_p\left(\boldsymbol{a}\big|_{p-O} + \boldsymbol{a}\big|_{O-\Sigma}\right) \overset{\text{惯性力的}}{\underset{\text{概念起源}}{\Rightarrow}} \boldsymbol{F}\big|_p + \boldsymbol{f}_{\text{惯}} = m_p \boldsymbol{a}\big|_{p-O} \Rightarrow \boldsymbol{f}_{\text{惯}} \equiv -m_p \boldsymbol{a}\big|_{O-\Sigma} \\ \dfrac{\boldsymbol{F}\big|_p}{m_p} - \dfrac{\boldsymbol{F}\big|_o}{m_o} = \boldsymbol{a}\big|_{p-O} \overset{\text{引入相对受力}}{\Rightarrow} \boldsymbol{f}\big|_{p-O} \equiv \boldsymbol{F}\big|_p - \dfrac{m_p}{m_o}\boldsymbol{F}\big|_o = m_p \boldsymbol{a}\big|_{p-O} \end{array}\right\} \Rightarrow \boldsymbol{f}_{\text{惯}} = -\frac{m_p}{m_o}\boldsymbol{F}\big|_O \qquad (17)$$

因此， 惯性力的本质是参考物的经过质量加权平均后的真实受力。其可以是引力，也可以是摩擦力，拉力等非引力相互作用。更重要的是，所谓的惯性力其实不是作用在待考察物体 p 上，而是作用在参考物 o 上。本解释实际否定了爱因斯坦的强等效原理[14,16]，因此爱因斯坦的广义相对性原理不再具备行得通的逻辑路线。值得指出的是，我们已知只有引力相互作用有时钟的延缓效应[17]，因此，本解释预言引力场中自由下落的原子发出的特征光谱在无穷远处（引力势为零）观测者看来，仍然有红移效应。

有必要指出的是，上述的惯性力本质的定性解释是普适的。也就是即便是在同样的微观因果关系（7）的基础上进一步推广到任意运动（平动+转动）的参考系，或者是其他数学结构的微观因果关系，只要质点动力学方程的相对性原理推广到更一般的参考系，这里对应的惯性力本质上就取决于参考物的真实受力。因为，任何参考系的加速运动直接且唯一取决

于定义它的参考物的加速运动，进一步，任何参考物的加速度直接且唯一取决于参考物的真实受力。

3.5 质点动力学的相对性原理推广的唯一正确思路

对称新方程（11）式展示了在任意平动参考系直接适用的相对性原理， 因为平动参考系介于惯性系和任意参考系之间，这里把这一新实现的相对性原理称为**适度相对性原理**[13]。至此，我们可以给动力学的相对性原理比较归纳如下，

伽利略力学相对性原理：	力学规律在任意惯性系保持形式不变。
	物理基础： 牛顿绝对时空观（伽利略速度变换）
狭义相对性原理：	物理规律在任意惯性系保持形式不变。
	物理基础： 相对论性时空观（光速不变原理）
广义相对性原理：	物理规律在任意参考系保持形式不变。
	物理基础： 爱因斯坦强等效原理（引力和惯性力在物理上等效）
适度相对性原理：	质点动力学在任意平动参考系保持形式不变。
	物理基础：因果对称和一致原理

表 1　相对性原理的分类

根据对称新方程（11）式推导的成功经验，质点动力学的相对性原理推广的关键在于确保参考物的受力和新推广参考系的加速度满足因果对称和一致。 因此，本文提出**相对性原理推广的正确思路**为

$$\begin{matrix}\text{经典力学}\\\text{经验规律}\\\Delta F = m\Delta a\end{matrix}\overset{\text{因果对称}}{\underset{\text{一致原理}}{\Rightarrow}}\begin{cases}\text{惯性系：} & \text{理想情形，0个参考质点} & F\big|_p = m_p a\big|_{p-\Sigma}\\ \text{任意平动参考系：} & \text{物理上直接取决于1个参考质点} & \dfrac{F\big|_p}{m_p}-\dfrac{F\big|_o}{m_o}=a\big|_{p-o}\\ \text{任意平动+转动参考系：} & \text{物理上直接取决于4个不共面质点} & ?\text{(目前数学无法实现)}\end{cases} \quad (18)$$

相对性原理从惯性系推广到平动参考系，有其必要性，而且其必要性可以通过类比来参考，

运动学	地心说 => 日心说	正确区分待考察天体的运动和地球参考系自身的运动
动力学	惯性系 => 平动系	正确区分待考察物体的受力和参考物的受力

表 2　相对性原理推广的必要性

在历史上，正是地心说到日心说的革命，使得人们理清了天体的真实运动，从而导致了开普勒三大运动定律的发现，进而导致了万有引力理论计算表达式的发现。与此类比，人们理清物体的真实受力也是非常重要的，因为这将影响物体的所受作用力的性质的判断。比如应用到宇宙学上，我们已经有讨论初步表明这将影响暗能量命题的判断。

根据质点动力学的相对性原理推广的唯一正确思路，我们曾经努力尝试把质点动力学推广到任意运动（平动+转动）的参考系。众所周知，对于转动的物理刚体参考系，确定刚性转动参考系的全部运动学性质，至少需要不同面的四个质点的物理信息。因此，构建动力学方程时，选取的是物理的转动参考系，动力学方程理论上就必须同时纳入至少四个参考质点的动力学因果对应而仍保持简洁的形式。这一点显然从未考虑过，也没有做到过，至少在目前的数学语言框架下无法自然地实现。而且，为了在转动参考系中考察一个运动质点，动力学方程必须因此同时引入 4 个不共面参考质点，这在形式理论上讲也是极为不经济的。当然，这在另一方面证明了至少当前方案下的爱因斯坦广义相对性原理是不足信的。这里建议质点动力学方程的物理相对性概念拓展到所有的平动参考系为止，对于转动部分，转动参考系原则上当然可以使用，但需要理解为可以通过数学的坐标系变换先变换到平动参考系，然后再应用新形式的质点动力学方程。根据这一精神，根据（11）式和（2）式，我们可以变通地写出在任意运动的参考系适用的质点动力学方程，

$$\frac{\boldsymbol{F}|_p}{m_p}-\frac{\boldsymbol{F}|_o}{m_o}=\boldsymbol{a}|_{p-O}+2\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}|_{p-O}+\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\times\boldsymbol{r}|_{p-O}+\boldsymbol{\omega}\times\left(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}|_{p-O}\right) \tag{19}$$

其中O正是任意运动（平动+转动）的参考系，$\boldsymbol{\omega}$为该参考系相对宇宙空间的背景转动的角速度。显然，对于任意运动的参考系，上述的质点动力学方程仍然彻底摆脱了对惯性系的依赖，如果进一步认为参考系相对宇宙空间的背景的转动是物理可观测的话，则方程（19）是对（11）式的进一步推广（尽管没能把参考系的转动归结为其上参考物的受力）。换而言之，当参考系的转动角速度为零时，O即成为平动参考系，而方程（19）退化为对称新方程（11）式，进一步当参考系的转动角速度为零且原点参考物的受力恒为零时， 则方程（19）退化为牛顿第二定律。 当然，方程（19）是对（11）式的推广是属于数学的，而非物理的。

退一步讲，适度相对性原理实际上已经可以满足观测和应用实践的基本需要。一方面，我们从来不能确定观测者所在的地球在宇宙空间背景中的确切位置，速度，加速度，换而言之，对参考系的平动是无法绝对划分的。另一方面，由于宇宙空间的背景是绝对的，是恒定不变，我们通过足够遥远的星系，总是能够确定任何参考系相对宇宙空间背景的转动。否则，$d\,\boldsymbol{e}_i|_O/dt=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{e}_i|_O$根本就无法确定。在实践中，由于宇宙空间背景是客观的和恒定不变的，所以背景中的方向也是客观的，我们可以借助足够远的星系来定义背景中的方向。从而对于任意的参考物，我们可以根据绝对宇宙空间背景的方向来定义坐标轴的指向，在此基础上建立一个无自转的参考系。换而言之，对于参考系的转动原则上是可以划分的。因此观测者真正必需的动力学规律是满足在任何无自转参考系下保持形式不变。再有，对于质点动力学，

任何的平动现象总可以被归到质点之间的相对运动，而单个质点没有自转的概念。换句话说，任何参考物在把其看成质点之后，就不存在自转问题。所以，参考系的转动问题实质上可以归于数学问题，原则上可以从动力学的相对性物理中分离出来。因此，最精简又够用的相对性原理应该是物理学规律相对任何平动参考物（即任何无自转参考系）的不变性。

3.6 牛顿动力学的对称新方程和分析力学的精神一致

对称新方程的两边同乘以待考察物体的质量，则可以得到

$$\boldsymbol{F}\big|_p - \frac{m_p}{m_o}\boldsymbol{F}\big|_o = m_p\,\boldsymbol{a}\big|_{p-O} \tag{20}$$

根据可观测的加速度都是相对加速度的物理实质， 与此相对应，引入**“相对受力”**的概念，

$$\boldsymbol{f}\big|_{p-O} \equiv \boldsymbol{F}\big|_p - \frac{m_p}{m_o}\boldsymbol{F}\big|_o = m_p\,\boldsymbol{a}\big|_{p-O} \tag{21}$$

这里 $\boldsymbol{f}\big|_{p-O}$ 表示质点 p 在参考系 O 中的相对受力。即牛顿动力学的对称新方程在形式上重新回到了类似牛顿第二定律的状态，前提是受力项的实质性含义发生了改变，即原本需要考虑的待考察质点的全部受力替换成了待考察质点和参考物之间的相对受力。所以，对称新方程可以自然地融入牛顿动力学在传统方案下导出的定理和推论：只要把待考察质点的全部受力项（$\boldsymbol{F}\big|_p$）替换为待考察质点和参考物之间的相对受力（$\boldsymbol{f}\big|_{p-O} \equiv \boldsymbol{F}\big|_p - \left(m_p/m_o\right)\boldsymbol{F}\big|_o$），形式均可保留。

而对于分析力学，一般的纯保守力做功的质点系统的动力学问题，因为保守力直接定义于初末态之间的势能差，除此之外，也没有去考虑质点的全部受力，因此通常没有所谓的惯性系问题。只考虑保守力已经相当于是质点系统中的相对受力。分析力学中一般处理的保守力已经是净力（即合外受力相对扣除后的力），这与对称新方程引入参考物，从而在 p 和 o 之间定义相对受力，在精神上是一致的。所以，在分析力学的保守力系统中，通常没有遇到寻找惯性系的问题。但是对于包含了非保守力或者保守力不足以代表净力的质点系统的动力学， 则同样不能忽略参考物的做功，在做功部分必须作因果对称的扣除，才能和相对的动能一起满足拉格朗日方程或哈密顿原理。

4　推广到平动参考系的功能原理和冲量定理

根据牛顿动力学在平动参考系下的对称新方程在空间和时间上的积分，同样可以得到一般平动参考系中的功能原理和冲量定理。我们令有两个物体，其中一个物体为 p，另一物体

为O。记两物体开始相对运动时为 1 态，运动一段时间后为 2 态。 功能原理分析如下：根据等式（21）的两侧各内积$d\mathbf{r}|_{p-O}$得

$$\boldsymbol{f}\,|_{p-O}\cdot d\,\mathbf{r}|_{p-O}=\left(\boldsymbol{F}\,|_{p}-\frac{m_p}{m_o}\boldsymbol{F}\,|_{o}\right)\cdot d\,\mathbf{r}|_{p-O}=m_p\frac{d\,\mathbf{v}|_{p-O}}{dt}\cdot d\,\mathbf{r}|_{p-O}=d\left(\frac{1}{2}m_p\left(\mathbf{v}|_{p-O}\right)^2\right)\tag{22}$$

研究从 1 态运动到 2 态的过程，对等式（22）的两侧积分得：

$$W|_{p-O}\equiv\int_1^2\boldsymbol{f}\,|_{p-O}\cdot d\,\mathbf{r}|_{p-O}=\int_1^2\left(\boldsymbol{F}\,|_{p}-\frac{m_p}{m_o}\boldsymbol{F}\,|_{o}\right)\cdot d\,\mathbf{r}|_{p-O}=\frac{1}{2}m_p\left(\mathbf{v}_2|_{p-O}\right)^2-\frac{1}{2}m_p\left(\mathbf{v}_1|_{p-O}\right)^2\tag{23}$$

其中$W|_{p-O}$引用原做功的定义，上式第一步正是相对的做功。由此得到的（23）式即是推广的功能原理。同理可分析冲量定理，根据（21）式两侧各乘dt，得：

$$\boldsymbol{f}\,|_{p-O}\,dt=\left(\boldsymbol{F}\,|_{p}-\frac{m_p}{m_o}\boldsymbol{F}\,|_{o}\right)dt=\boldsymbol{a}|_{p-O}\,dt=d\,\mathbf{v}|_{p-O}\tag{24}$$

研究从 1 态运动到 2 态的过程，对等式（24）的两侧积分得：

$$\boldsymbol{I}|_{p-O}\equiv\int_1^2\boldsymbol{f}\,|_{p-O}\,dt=\int_1^2\left(\boldsymbol{F}\,|_{p}-\frac{m_p}{m_o}\boldsymbol{F}\,|_{o}\right)dt=\int_1^2 m_p d\,\mathbf{v}|_{p-O}=\Delta\boldsymbol{P}|_{p-O}\,,\tag{25}$$

其中$\boldsymbol{I}|_{p-O}$引用原冲量的定义，上式第一步正是相对的冲量。由此得到的（25）式即是在一般平动参考系可直接适用的推广的冲量定理。

5 全方位的应用举例和分析比较

下面是牛顿动力学的对称新方程的应用举例，通过选取最典型的经典力学的实际问题，分别展示在近似惯性系，非惯性系，完全非惯性系情况下的应用优势。

5.1 推导日心参考系中行星动力学的经验规律（近似惯性系）

考察在太阳系统内部的两个质点 1（比如地月系统中的月亮）和 2（比如金星）。任意质点i所受到的来自整个宇宙的全部受力在理论上表示为（因为针对天体，非引力相互作用可以忽略，这里暂不考虑）

$$\boldsymbol{F}|_i=\left(\boldsymbol{f}_i\right)_{SolarGrav}+\left(\boldsymbol{f}_i\right)_{OutSolarGrav}\tag{26}$$

其中$\left(\boldsymbol{f}_i\right)_{SolarGrav}$表示质点$i$受到的来自太阳系内部物质的引力，$\left(\boldsymbol{f}_i\right)_{OutSolarGrav}$则表示质点$i$受到的来自太阳系外物质的引力。根据牛顿动力学的对称新方程，质点 1 和 2 的相对动力学可以具体展开为

$$\boldsymbol{F}\big|_1 - \frac{m_1}{m_2}\boldsymbol{F}\big|_2 = \left[\left(\boldsymbol{f}_1\right)_{SolarGrav} - \frac{m_1}{m_2}\left(\boldsymbol{f}_2\right)_{SolarGrav}\right] + \left[\left(\boldsymbol{f}_1\right)_{OutSolarGrav} - \frac{m_1}{m_2}\left(\boldsymbol{f}_2\right)_{OutSolarGrav}\right] = m_1\,\boldsymbol{a}\big|_{1-2}$$

（27）

通常由于质点 1 和 2 被引力束缚在太阳系统内部，在和太阳系外的物质的相对位置上差异很小，近似有

$$\frac{\left(\boldsymbol{f}_1\right)_{OutSolarGrav}}{\left(\boldsymbol{f}_2\right)_{OutSolarGrav}} \approx \frac{m_1}{m_2}\,,$$ （28）

由此，（27）式在较高的精度上可以近似为

$$\boldsymbol{F}\big|_1 - \frac{m_1}{m_2}\boldsymbol{F}\big|_2 \approx \left[\left(\boldsymbol{f}_1\right)_{SolarGrav} - \frac{m_1}{m_2}\left(\boldsymbol{f}_2\right)_{SolarGrav}\right] = m_1\,\boldsymbol{a}\big|_{1-2}$$ （29）

当质点 2 选取整个太阳为参考物的话，一般有 $m_1 << m_2$，左边第二项有很大的压低而可以忽略。 如选取太阳中心的和质点 1 质量相当的实际物体为参考物，则由于太阳系的物质相对质点 2 的分布具有较高的球对称性，仍有 $\left(\boldsymbol{f}_2\right)_{SolarGrav} \approx 0$ 。总之，以太阳系的中心为参考原点（质点 2）时，质点 1 的动力学可进一步近似为

$$\boldsymbol{F}\big|_1 - \frac{m_1}{m_2}\boldsymbol{F}\big|_2 \approx \left(\boldsymbol{f}_1\right)_{SolarGrav} = m_1\,\boldsymbol{a}\big|_{1-2}\,,$$ （30）

此式即太阳系内行星动力学所满足的经验规律。牛顿基于椭圆轨道反推出万有引力的平方反比律也是在实质上基于此（30）式。 可见，满足太阳系经典力学经验规律的（30）式实质上是牛顿动力学的对称新方程应用到宇宙中各级天体引力束缚系统下的近似。 通常的银心参考系，日心参考系和地心参考系都可以适用此近似。即便是最常用的地面参考系，本质上也可以归结到地心参考系。而且通过（28）式可以看出，实际应用中之所以可以不去考虑来自太阳系外的受力，其直接原因是在被研究物体和参考物体之间，来自太阳系外的受力在两者受力的相对统计中很近似地抵消了。

而在传统方案中，在不忽略太阳系外引力的前提下，由牛顿第二定律推导（30）将因为需要引入更高近似度的惯性系和惯性力而颇费周折。

5.2 推导地心或地面等实验室参考系的经验规律（近似惯性系）

假定 A 为地面上运动的被研究的质点，B 是以静止在地面上的某一个参考物（亦标记为 B）为参考原点的，相对宇宙空间背景无自转的参考系。根据牛顿动力学的对称新方程，A 相对 B 的动力学方程可以直接表示为

$$\boldsymbol{F}\big|_A - \frac{m_A}{m_B}\boldsymbol{F}\big|_B = m_A\,\boldsymbol{a}\big|_{A-B}, \qquad (31)$$

理论上，A 和 B 的全部受力可以具体展开如下，

$$\boldsymbol{F}\big|_A = 地球之外的引力(\propto m_A)+地球对A的引力(\propto m_A)+非引力性受力(\boldsymbol{f}_A\big|_{非引力}).$$
$$\boldsymbol{F}\big|_B = 地球之外的引力(\propto m_B)+地球对B的引力(\propto m_B)+非引力性受力(\boldsymbol{f}_B\big|_{非引力}).$$
$$(32)$$

对参考物 B 的非引力部分实际受力原则上应该通过理论计算，但是由于参考物 B 在地面上静止而满足力学平衡，在地面经典力学的实验精度下，其非引力部分实际受力完全可以由参考物 B 在重力记下的力学平衡来近似测出（这里只能说近似，是因为实际的地面参考系是相对宇宙空间背景存在转动的，近似程度取决于参考物体在多大程度上可以看作为质点而忽略其随地平面相对空间背景的转动）。即对地面的静止参考物 B 有，

$$\boldsymbol{f}_B\big|_{非引力} = -m_B\vec{g} \qquad (33)$$

同样采用引力部分受力的可以相对抵消的近似，

$$\frac{\boldsymbol{f}_{OutEarthGrav}\big|_A}{\boldsymbol{f}_{OutEarthGrav}\big|_B} \approx \frac{m_A}{m_B} \quad ; \quad \frac{\boldsymbol{f}_{EarthGrav}\big|_A}{\boldsymbol{f}_{EarthGrav}\big|_B} \approx \frac{m_A}{m_B} \qquad (34)$$

最后代入第（31）式，得到

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}\big|_A - \frac{m_A}{m_B}\boldsymbol{F}\big|_B &= \boldsymbol{f}_A\big|_{非引力} - \frac{m_A}{m_B}(\boldsymbol{f}_B\big|_{非引力}) = \boldsymbol{f}_A\big|_{非引力} - \frac{m_A}{m_B}(-m_B\boldsymbol{g}) \\ &= \boldsymbol{f}_A\big|_{非引力} + m_A\boldsymbol{g} = m_A\,\boldsymbol{a}\big|_{A-B}\end{aligned} \qquad (35)$$

此即地面经典力学实验所满足的经验规律。进一步，如果假定 B 是地面上的任意运动的物体（包括可能的加速），则实际应用的（35）式可以自然地修改为，

$$\boldsymbol{f}_A\big|_{非引力} - \frac{m_A}{m_B}(\boldsymbol{f}_B\big|_{非引力}) = m_A\,\boldsymbol{a}\big|_{A-B} = \left[\boldsymbol{f}_A\big|_{非引力} + m_A\boldsymbol{g}\right] - \frac{m_A}{m_B}\left[\boldsymbol{f}_B\big|_{非引力} + m_B\boldsymbol{g}\right] \qquad (36)$$

由此可见，经典力学实验所满足的经验规律是对称形式的动力学方程在特定条件下的近似。而且通过（35）式或（36）式可以看出，动力学在实验室参考系的实际应用中之所以可以不去考虑来自太阳系内包括太阳以及其他天体的引力，并不是忽略了（因为地球绕太阳的公转加速度达 6 mm/s^2 ），其直接原因是在被研究物体和参考物体之间，来自地球引力系统之外的引力在两者受力的相对统计中很近似地抵消了。

与此相对比，如果在不忽略太阳系引力的前提下由牛顿第二定律推导实验室参考系的（35）式或（36）式，是需要费一些周折的：一般需要先假定日心参考系为惯性系，然后在地心参考系中引入惯性力，并证明根据测得的地心相对日心的加速度导致的惯性力可以和地心受到的太阳系的引力抵消，经过双重假定惯性系才能得到（35）式或（36）式。

5.3 航天器内的动力学举例（非惯性系）

以无动力的航天器或卫星的失重状态为研究对象，令飞船中悬空的物体为 1，质量记为 m_1。令在飞船上并保持静止接触的物体为 2，质量记为 m_2。令以地球的质心为参考原点的坐标系为 E，质量记为 $m_{地球}$。 根据标准牛顿力学理论，飞船是非惯性系，则动力学方程满足，

$$\boldsymbol{F}\big|_1 + \boldsymbol{f}\big|_{惯性力} = m_1\,\boldsymbol{a}\big|_{1\text{-}船} \quad ; \quad \boldsymbol{F}\big|_2 + \boldsymbol{f}\big|_{惯性力} = m_2\,\boldsymbol{a}\big|_{2\text{-}船} \tag{37}$$

在这种情况下可以选取遥远的更大引力束缚系统的中心为近似的惯性系，这里记作 Σ'，则有惯性力为

$$\boldsymbol{f}\big|_{惯性力} \approx -m_1\,\boldsymbol{a}\big|_{船-\Sigma'} \tag{38}$$

但是理论上需要先测出飞船相对遥远的某近似惯性系的加速度，再代回到（37）才能求解动力学。

直接应用对称新方程，选定研究对象 p 是物体 1 或 2，参考物 o 是飞船，把 p,o 代入新质点动力学方程，得：

$$\frac{\boldsymbol{F}\big|_1}{m_1} - \frac{\boldsymbol{F}\big|_{船}}{m_{船}} = \boldsymbol{a}\big|_{1-船质心系} \quad (39)\ ; \quad \frac{\boldsymbol{F}\big|_2}{m_2} - \frac{\boldsymbol{F}\big|_{船}}{m_{船}} = \boldsymbol{a}\big|_{2-船质心系} \quad (40)$$

在不考虑太空中其他星体（除地球）对飞船的影响，故在飞船中悬空的物体 1 及飞船只受万有引力， 得：

$$\boldsymbol{F}\big|_1 = G\frac{m_{地球}m_1}{r_{1-E}^3}\boldsymbol{r}\big|_{1\to E} \quad (41)\ ; \quad \boldsymbol{F}\big|_{船} = G\frac{m_{地球}m_{船}}{r_{船-E}^3}\boldsymbol{r}\big|_{船\to E} \quad (42)$$

其中 $\boldsymbol{r}\big|_{1\to E}$ 下标中箭头表示位置矢量的指向。r_{1-E} 则表示位置矢量的长度。 （41）、（42）代入式（39）得：

$$\frac{Gm_{地球}}{r_{1-E}^3}\boldsymbol{r}\big|_{1\to E} - \frac{Gm_{地球}}{r_{船-E}^3}\boldsymbol{r}\big|_{船\to E} = \boldsymbol{a}\big|_{1-船质心系} \tag{43}$$

因为物体 1 在地球质心系 E 中的位置矢量长度约等于飞船在地球质心系 E 中的位置矢量长度，故得下式：$\boldsymbol{a}\big|_{1-船质心系} \approx 0$，即物体 1 相对于飞船质心的加速度近似为零，若一开始物体 1 相对飞船质心就是静止的，则说明飞船中的物体 1 将会保持相对飞船质心静止。

而在飞船上并保持静止接触的物体 2，由于相对飞船静止，所以$\boldsymbol{a}\big|_{2-船质心系}=0$，理论上讲，由于物体 2 和飞船接触，其受力除了引力，还包括飞船对 2 的作用合力（标记$\boldsymbol{F}\big|_{船\text{-}2}$），因此同理，根据（40）可得：

$$G\frac{m_{地球}}{r_{2-E}^{3}}\boldsymbol{r}\Big|_{2\to E}+\frac{\boldsymbol{F}\big|_{船\text{-}2}}{m_{2}}-G\frac{m_{地球}}{r_{船-E}^{3}}\boldsymbol{r}\Big|_{船\to E}\approx\frac{\boldsymbol{F}\big|_{船\text{-}2}}{m_{2}}=0 \tag{44}$$

此即说明无动力飞船中，与飞船保持静止接触的物体 2 和飞船之间的作用合力为零。因此，不管从受力还是运动状态分析，无动力飞船里的物体都是处于失重状态的。可见， 根据牛顿动力学的对称新方程解释失重现象更直接更自然。

5.4 加速运动小车参考系的应用举例 （非惯性系）

假定光滑地面上有一个车厢，重 10 千克，在水平拉力 10 牛顿的作用下水平沿 x 轴向右运动，在车厢水平光滑的底板上有一个 1 千克的小物块，也受到水平向右方向 1 牛顿的拉力。试求小物块相对车厢的加速度。具体分析如下，

1，牛顿动力学的对称新方程适用于任何相对宇宙背景无自转的参考系。小物块即为p，车厢即为o，方程形式为：

$$\frac{\boldsymbol{F}\big|_{p}}{m_{p}}-\frac{\boldsymbol{F}\big|_{o}}{m_{o}}=\boldsymbol{a}\big|_{p-O}\text{。} \tag{45}$$

2，实际应用中，质点的受力永远不可能做到统计全部的受力。假定对引力的计算只统计到太阳系内的引力为止，则有

$$\frac{\boldsymbol{F}\big|_{p}}{m_{p}}-\frac{\boldsymbol{F}\big|_{o}}{m_{o}}\approx\frac{\boldsymbol{f}_{地球引力}\big|_{p}+\boldsymbol{f}_{太阳系内其他引力}\big|_{p}+\boldsymbol{f}_{地面其他受力}\big|_{p}}{m_{p}}-\frac{\boldsymbol{f}_{地球引力}\big|_{o}+\boldsymbol{f}_{太阳系内其他引力}\big|_{o}+\boldsymbol{f}_{地面其他受力}\big|_{o}}{m_{o}}=\boldsymbol{a}\big|_{p-O} \tag{46}$$

在通常的精度要求下，根据万有引力的受力公式，近似满足

$$\frac{\boldsymbol{f}_{地球引力}\big|_{p}}{\boldsymbol{f}_{地球引力}\big|_{o}}\approx\frac{m_{p}}{m_{o}}\quad;\quad\frac{\boldsymbol{f}_{太阳系内其他引力}\big|_{p}}{\boldsymbol{f}_{太阳系内其他引力}\big|_{o}}\approx\frac{m_{p}}{m_{o}} \tag{47}$$

由此，得到最常用的地面动力学公式，

$$\frac{\boldsymbol{f}_{地面其他受力}\big|_{p}}{m_{p}}-\frac{\boldsymbol{f}_{地面其他受力}\big|_{o}}{m_{o}}=\boldsymbol{a}\big|_{p-O} \tag{48}$$

3, 对本问题，地面其他受力包括车厢和物块各自受到的拉力和地面的支撑力。即

$$\frac{\boldsymbol{f}_{地面支撑力}\big|_{物块}+\boldsymbol{f}_{水平拉力}\big|_{物块}}{m_{物块}}-\frac{\boldsymbol{f}_{地面支撑力}\big|_{车厢}+\boldsymbol{f}_{水平拉力}\big|_{车厢}}{m_{车厢}}=\boldsymbol{a}\big|_{物块相对于车厢} \tag{49}$$

由于支撑力都是竖直方向，则对于水平方向，动力学方程有

$$\frac{f_{水平拉力}\big|_{物块}}{m_{物块}}-\frac{f_{水平拉力}\big|_{车厢}}{m_{车厢}}=\frac{1N}{1kg}-\frac{10N}{10kg}=0=a_{物块相对于车厢}\big|_{水平方向} \tag{50}$$

所以，最后求得物块相对车厢的水平加速度为零。

与此相比，由牛顿第二定律求解本题，即传统的做法：首先，假定地面参考系为惯性系，在地面惯性系中应用牛顿第二定律。其次，求解小车相对地面惯性系的加速度，然后才能真正引入惯性力。最后，在小车系中来求解物块的动力学。

5.5 宇宙非引力束缚系统中的动力学举例（完全非惯性系）

以太阳，地球和月亮三体问题为例研究月亮相对地球的动力学。由于地心参考系不是惯性系，所以在标准的牛顿力学框架下，满足的方程为

$$\boldsymbol{F}\big|_{月}+\boldsymbol{f}\big|_{惯性力}=m_{月}\,\boldsymbol{a}\big|_{月-地} \tag{51}$$

但是若要实际求解月亮相对于地心参考系的动力学，必须首先引入惯性系，由于考察的是只包括太阳，地球和月亮的理想系统，不存在严格或近似程度很高的实体惯性系，原则上（51）式的直接应用存在困难。这里假定可以把日心参考系近似为惯性系。因此，在日心参考系中，惯性力可近似表示为 $\boldsymbol{f}\big|_{惯性力}\approx -m_{月}\,\boldsymbol{a}\big|_{地-日}$，这里所选取的日心参考系相比惯性系的近似程度，将直接决定实际求解动力学方程（51）式的精度。可选取的实际参考系近似到惯性系的程度越高，则计算精度越高，否则，近似程度越差，则计算精度越低。接下来，若要精确计算 $\boldsymbol{a}\big|_{地-日}$，则需要测量地球相对太阳的加速度，如果期望通过动力学反向理论上精准计算 $\boldsymbol{a}\big|_{地-日}$，则又陷入和开始计算 $\boldsymbol{a}\big|_{月-地}$ 同样的循环。这里不妨再次近似日心参考系为惯性系，则地球相对太阳的加速度在数值上近似满足牛顿第二定律：$\boldsymbol{F}\big|_{地}\approx m_{地}\,\boldsymbol{a}\big|_{地-日}$，至此，在传统方案下应用（51）式的过程中，光在理论阶段，而不是实际测量或统计阶段，就已经叠加了两次的近似。

与此作鲜明对比，直接应用牛顿动力学的对称新方程，则为

$$\frac{\boldsymbol{F}\big|_{月}}{m_{月}}-\frac{\boldsymbol{F}\big|_{地}}{m_{地}}=\boldsymbol{a}\big|_{月-地} \tag{52}$$

由于讨论假定在理想的三体系统中，所以，月亮和地球的受力可以分别根据万有引力定律的公式给出，

$$\boldsymbol{F}\big|_{月}=G\frac{m_{月}m_{地}}{r^3_{月-地}}\boldsymbol{r}\big|_{月\to地}+G\frac{m_{月}m_{日}}{r^3_{月-日}}\boldsymbol{r}\big|_{月\to日} \quad (53);\qquad \boldsymbol{F}\big|_{地}=G\frac{m_{地}m_{月}}{r^3_{地-月}}\boldsymbol{r}\big|_{地\to月}+G\frac{m_{地}m_{日}}{r^3_{地-日}}\boldsymbol{r}\big|_{地\to日} \quad (54)$$

代回上述受力的理论表达式就可以直接求解（52）式，得到动力学方程的计算表达式

$$G\frac{m_{地}+m_{月}}{r^3_{月-地}}\boldsymbol{r}_{月\to地}+Gm_{日}\left(\frac{\boldsymbol{r}_{月\to日}}{r^3_{月-日}}+\frac{\boldsymbol{r}_{日\to地}}{r^3_{日-地}}\right)=\boldsymbol{a}\big|_{月-地} \tag{55}$$

不难得到验证，惯性力正是

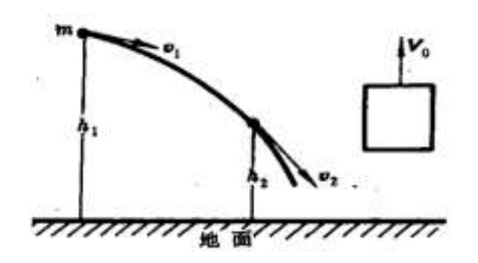
$$\boldsymbol{f}\big|_{惯性力}=-\frac{m_{月}}{m_{地}}\boldsymbol{F}\big|_{地}=-G\frac{m_{月}m_{月}}{r^{3}_{地-月}}\boldsymbol{r}_{地\to月}-G\frac{m_{月}m_{日}}{r^{3}_{地-日}}\boldsymbol{r}_{地\to日} \tag{56}$$

可以发现，在牛顿动力学的对称新方程的应用过程中没有用到近似， 惯性力的表达式（56）式在这里是精确的，而在传统的做法（52）式中， 真正计算惯性力的过程中不可避免地需要近似，而应用牛顿动力学的对称新方程省去了这个近似的过程和由此带来的精度误差。

至于质心参考系，实际上是质点系的动力学。质心参考系有利于研究质点系统内部的质点之间的相对运动。质心参考系选取的实体参考物相当于是选取了整个系统中的所有质点作为参考物，只是在确定代表性参考质点的空间位置上作了数学处理（即质心坐标定义式）。所以，在质心运动定理中，还要考虑整体系统的外部受力，即要统计整个质点系统作为参考物的全部受力。所以，质心参考系同样符合牛顿动力学的对称新方程的精神。

在三体动力学问题中，传统上选取三体的质心参考系也存在精确求解方案。这是因为在理想的三体问题中，质心参考系作为一个严格的惯性系，理论上没有惯性系近似带来的精度误差。 但是从上述三体动力学的例子看，直接应用实际平动参考系中的牛顿动力学（11）式相比在质心系中应用牛顿第二定律在数学上有所简化。推而广之，对于理想的 N 体天体动力学问题（即忽略外部作用力），这时候的质心受力严格为零；由于惯性力为零或者说没有作惯性系的近似，平动参考系中的对称新方程（11）式和 N 体质心参考系中的牛顿第二定律方案在精度上应该是一样。区别在于以对称新方程为核心的动力学方案可以选取任意一个物体为待考察质点，任意另取一个物体为参考物，分别算出其他 N-1 个物体对于它们的作用力，方程可以一步到位（类似（55）式），而且这些运动学量是可以对应直接测量的量。而对于传统方案下的质心系求解动力学，首先，质心坐标是抽象的。先要根据数学公式，由 N 体的位置和质量定义出质心的动态的坐标，然后以此为惯性参考系原点，应用牛顿第二定律。但是受力部分是 N 体之间的引力，直接是由 N 体之间的相对坐标给出而不是由每个物体相对质心的坐标给出，此外，直接求解得到的运动轨迹是相对动态的质心参考系的，而不是直接相对某个天体（比如观测者所在的地球）的。所以这样求解出动力学，在数学计算上有画蛇添足之嫌。相比之下，引用平动参考系中的牛顿动力学的对称新方程（11）式，不管是受力部分，还是加速度的表达式都是直接相对实际物体的，出现在其中的都是 N 体之间的相对位置。所以数学计算和求解上应该有明显的简化。

5.6 机械能守恒问题在竖直方向非惯性系的实例



根据右图，一个物体做斜抛运动，试问在相对地面匀速上升的电梯中观测，物体所满足的功能原理[18]。

在理想的情况下分析，地球可以看作为严格的球体，质心在球心，且假定不存在空气阻力，因为时间短也不考虑地球自转对运动的影响；同时根据题意假定电梯质量远小于地球，也远小于所研究物体 p，记地球质心至地面的距离为 R_0。其次，在地心参考系中，选定研究对象 p 是斜抛物体，参考物体 o 是地球质心，则根据推广的功能原理有

$$\begin{aligned} W\big|_{物-地心系} &= \int_1^2 \left(\boldsymbol{F}\,|_{物} - \frac{m_{物}}{m_{地球}} \boldsymbol{F}\,|_{地心} \right) \cdot d\boldsymbol{r}_{物-地心系} = \frac{1}{2} m_{物} \left(\boldsymbol{v}_2 \big|_{物-地心系} \right)^2 - \frac{1}{2} m_{物} \left(\boldsymbol{v}_1 \big|_{物-地心系} \right)^2 \\ &= \int_1^2 \left(\boldsymbol{F}\,|_{物} - \frac{m_{物}}{m_{地球}} \left(-\boldsymbol{F}\,|_{物} \right) \right) \cdot d\boldsymbol{r}_{物-地心系} = \Upsilon \int_1^2 \boldsymbol{F}\,|_{物} \cdot d\boldsymbol{r}_{物-地心系} \end{aligned} \tag{57}$$

其中 $\boldsymbol{F}\,|_{地心} = -\boldsymbol{F}\,|_{物}$ 用到了牛顿第三定律，而系数 $\Upsilon = 1 + m_{物} / m_{地球}$ 则实质上可以表征地心参考系偏离理想惯性系的程度。显然只要取作 $\Upsilon G m_{地球} / R_0^2 = g$，从（57）式可以自然地推导出机械能守恒定律，

$$mgh_2 + \frac{1}{2} m\boldsymbol{v}_2^2 = mgh_1 + \frac{1}{2} m\boldsymbol{v}_1^2 \tag{58}$$

可见，此时在不作惯性系近似的严格求解下，由于相对受力的做功可以写成势能的形式，所以，仍然可以写作机械能守恒的形式[19,20]。

最后，以匀速运动的电梯参考系为例，详细考察“物体和地球”组成的系统的功能原理。选定研究对象 p 是斜抛物体，参考物体 o 是电梯， p 在 t_1 时相对于电梯速度是 $\boldsymbol{v}_1$-$\boldsymbol{V}_0$， p 在 t_2 时相对于电梯速度是 $\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{V}_0$，研究物体从 t_1 到 t_2 的过程。把 p, o 所代表的物体一起代入推广的功能原理公式得：

$$W\big|_{物-电梯系} = \int_1^2 \left(\boldsymbol{F}\,|_{物} - \frac{m_{物}}{m_{梯}} \boldsymbol{F}\,|_{梯} \right) \cdot d\boldsymbol{r}_{物-电梯系} = \frac{1}{2} m_{物} \left(\boldsymbol{v}_2 \big|_{物-电梯系} \right)^2 - \frac{1}{2} m_{物} \left(\boldsymbol{v}_1 \big|_{物-电梯系} \right)^2 \tag{59}$$

由于电梯质量远小于地球，也远小于物体 p，物体受到的引力只需考虑地球的引力；同样对电梯而言，原则上应用（59）式是应该根据常见力的理论公式来计算 $\boldsymbol{F}\,|_{梯}$， 但是由于本题中只给出了电梯的运动状态，所以只能通过运动状态反推其受力。因为约定只统计地球引力系统内的受力，取系统质心合外力为零，反复应用牛顿动力学的对称新方程，则有

$$\boldsymbol{F}\,|_{物} - \frac{m_{物}}{m_{梯}} \boldsymbol{F}\,|_{梯} = \boldsymbol{F}\,|_{物} - \frac{m_{物}}{m_{梯}} m_{梯} \boldsymbol{a}\big|_{梯-质心} = \boldsymbol{F}\,|_{物} - m_{物} \boldsymbol{a}\big|_{地心-质心} = \boldsymbol{F}\,|_{物} - m_{物} \frac{\boldsymbol{F}\,|_{地心}}{m_{地球}} = \boldsymbol{F}\,|_{物} + \frac{m_{物}}{m_{地球}} \boldsymbol{F}\,|_{物} = \Upsilon \boldsymbol{F}\,|_{物} \tag{60}$$

把（60）式代入（59）式左边第二步，再根据 $\Upsilon G m_{地球} / R_0^2 = g$，可以一直化简，

$$
\begin{aligned}
W|_{物-电梯系} &= \Upsilon\int_1^2 G\frac{m_{地球}m_{物}}{r^2|_{物-地心}}\boldsymbol{e}|_{物\to地心}\cdot\left(\boldsymbol{v}|_{物-地心系}+\boldsymbol{v}|_{地心-电梯系}\right)dt \\
&= \Upsilon m_{物}\int_{t_1}^{t_2} G\frac{m_{地球}\,\boldsymbol{e}|_{物\to地心}\cdot\boldsymbol{v}|_{物-地心系}\,dt}{r^2|_{物-地心}} + \Upsilon m_{物}\int_{t_1}^{t_2}\left(G\frac{m_{地球}}{r^2|_{物-地心}}\right)\boldsymbol{e}|_{物\to地心}\cdot\left(-\boldsymbol{V}_0\right)dt \\
&= \Upsilon m_{物}\int_{R_0+h_1}^{R_0+h_2} Gm_{地球}\,d\left(\frac{1}{r|_{物-地心}}\right) - m_{物}\int_{t_1}^{t_2}\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{V}_0\,dt = \Upsilon m_{物}Gm_{地球}\left(\frac{1}{R_0+h_2}-\frac{1}{R_0+h_1}\right) - m_{物}\boldsymbol{V}_0\cdot\left(\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_1\right) \\
&\overset{R_0\gg h_1,h_2}{=} \Upsilon m_{物}\frac{Gm_{地球}}{R_0^2}\left(h_1-h_2\right) - m_{物}\boldsymbol{V}_0\cdot\left(\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_1\right) = m_{物}g\left(h_1-h_2\right) - m_{物}\boldsymbol{V}_0\cdot\left(\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_1\right)
\end{aligned}
\tag{61}
$$

其中（61）式的第一个等号过程即用到了相对性物理量 $\boldsymbol{v}|_{物-电梯系}$ 的伽利略速度变换：

$$
\boldsymbol{v}|_{物-电梯系} = \boldsymbol{v}|_{物-地心系} + \boldsymbol{v}|_{地心-电梯系} = \boldsymbol{v}|_{物-地心系} + \left(-\boldsymbol{V}_0\right) \quad . \tag{62}
$$

回头再看（59）式的右边，再次应用上面的伽利略速度变换，则有

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}m_{物}\left(\boldsymbol{v}_2|_{物-电梯系}\right)^2 - \frac{1}{2}m_{物}\left(\boldsymbol{v}_1|_{物-电梯系}\right)^2 \\
&= \frac{1}{2}m_{物}\left(\boldsymbol{v}_2|_{物-地心系} + \boldsymbol{v}_2|_{地心-电梯系}\right)^2 - \frac{1}{2}m_{物}\left(\boldsymbol{v}_1|_{物-地心} + \boldsymbol{v}_1|_{地心-电梯系}\right)^2 \\
&= \frac{1}{2}m_{物}\left(\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{V}_0\right)^2 - \frac{1}{2}m_{物}\left(\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{V}_0\right)^2
\end{aligned}
\tag{63}
$$

因此， 推广的功能原理（59）式在匀速运动的电梯参考系中最后化简得到，

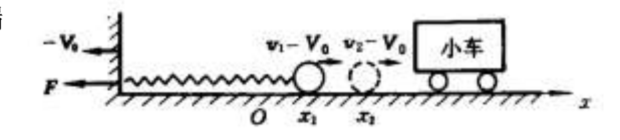
$$
m_{物}g\left(h_1-h_2\right) - m_{物}\boldsymbol{V}_0\cdot\left(\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_1\right) = \frac{1}{2}m_{物}\boldsymbol{v}_2^2 - \frac{1}{2}m_{物}\boldsymbol{v}_1^2 - m_{物}\boldsymbol{V}_0\cdot\left(\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_1\right) \tag{64}
$$

由此可见，推广的功能原理在电梯参考系下的求解结果同地面参考系的守恒定律完全保持了一致，如果一开始在（57）式和（60）式中，取 $\Upsilon = 1 + m_{物}/m_{地球} \Rightarrow 1$， 即把地心参考系近似为惯性系，仍然可以得到机械能守恒定律（58）式和逻辑一致的（64）式。因此，即便真的在完全偏离惯性系的参考系中讨论功能原理或者机械能的问题[19,20]，由于牛顿动力学的对称新方程和推广的功能原理在任意平动参考系下都是普适的，在应用过程中无需担忧遗漏或手动放入惯性力，从而可以放手应用。

与此相对比，根据牛顿第二定律出发，即便在找到近似惯性系的情况下，实际参考系相对该近似惯性系的加速度，以及由此引入的惯性力是一个观测量， 而非解析表达式，所以，理论上要求解这部分惯性力带来的做功存在原则上的困难[18]。

5.7 机械能守恒问题在水平方向非惯性系的实例

如右图所示，有一个轻质弹簧的一端系在墙上，另一端系一个质量为 m 的小球，小球处于光滑的水平面上，在平衡位置 O 附近振动。一辆小车沿水平方向以恒速 $\boldsymbol{V}_0$ 运动，那么从地面或小车上观察，“弹簧、小球和地球”这个系统的机械能[21]是否守恒？



选定研究对象 p 是小球，参考物体 o 是小车，令小球在 t_1 时距离平衡位置为 x_1，相对于

小车速度为$\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{V}_0$，令小球在$t_2$时距离平衡位置为$x_2$，相对于小车速度为$\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{V}_0$。对于小球从 1 态运动到 2 态的过程，把$p,o$所代表的物体一起代入推广的功能原理公式，得：

$$W\big|_{球-车心系}=\int_1^2\left(\boldsymbol{F}\,|_{球}-\frac{m_{球}}{m_{车}}\boldsymbol{F}\,|_{车}\right)\cdot d\,\boldsymbol{r}\big|_{球-车心系}=\frac{1}{2}m_{球}\left(\boldsymbol{v}_2\big|_{球-车心系}\right)^2-\frac{1}{2}m_{球}\left(\boldsymbol{v}_1\big|_{球-车心系}\right)^2 \tag{65}$$

约定受力只统计地球引力系统内的相互作用，由于球，弹簧和小车都在水平面上运动，这里只涉及水平方向的功能转化。小球受到的水平方向受力只为弹性力，根据胡克定律：$\boldsymbol{F}\,|_{球}=-k\boldsymbol{x}$；同样对小车而言，原则上其受力，应该根据常见力的理论公式来求解，但是由于本题只给出其在水平方向做匀速运动，因此只能通过运动反推，在较低的实验室参考系精度要求下，其所受水平方向合外力为零，代入（65）式左边得

$$\begin{aligned}W\big|_{球-车心系}&=\int_1^2\left(\boldsymbol{F}_{球}\big|_{水平}-0\right)\cdot\boldsymbol{v}\big|_{球-车心系}dt=\int_1^2\left(\boldsymbol{F}_{球}\big|_{水平}\right)\cdot\left(\boldsymbol{v}\big|_{球-地面系}+\boldsymbol{v}\big|_{地面-车心系}\right)dt\\&=\int_1^2(-k\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{v}\big|_{球-地面系}dt-\int_1^2\left(m_{球}\,\boldsymbol{a}\big|_{球-地面系}\right)\cdot\boldsymbol{V}_0dt=\int_1^2(-k\boldsymbol{x})\cdot d\boldsymbol{x}-m_{球}\int_1^2 d\boldsymbol{v}\big|_{球-地面系}\cdot\boldsymbol{V}_0\\&=\left(\frac{1}{2}kx_1^2-\frac{1}{2}kx_2^2\right)+m_{球}\left(\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2\right)\cdot\boldsymbol{V}_0\end{aligned} \tag{66}$$

其中速度矢量的伽利略变换（其中把地面视为地球的一部分），

$$\boldsymbol{v}\big|_{球-车心系}=\boldsymbol{v}\big|_{球-地面系}+\boldsymbol{v}\big|_{地面-车心系}=\boldsymbol{v}\big|_{球-地面系}-\boldsymbol{V}_0 \tag{67}$$

还用到了小球在地面参考系时，水平方向运动遵守的牛顿动力学的对称新方程，或者由此导出的经验公式，有

$$\boldsymbol{F}_{球}=-k\boldsymbol{x}=m_{球}\,\boldsymbol{a}\big|_{球\text{-}地面系} \tag{68}$$

回头再看（65）式的右边，再次应用上面的伽利略速度变换，则有

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}m_{球}\left(\boldsymbol{v}_2\big|_{球-车心系}\right)^2-\frac{1}{2}m_{球}\left(\boldsymbol{v}_1\big|_{球-车心系}\right)^2\\&=\frac{1}{2}m_{球}\left(\boldsymbol{v}_2\big|_{球-地面系}+\boldsymbol{v}_2\big|_{地面-车心系}\right)^2-\frac{1}{2}m_{球}\left(\boldsymbol{v}_1\big|_{球-地面系}+\boldsymbol{v}_1\big|_{地面-车心系}\right)^2\\&=\frac{1}{2}m_{球}\left(\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{V}_0\right)^2-\frac{1}{2}m_{球}\left(\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{V}_0\right)^2\\&=\frac{1}{2}m_{球}\left(\boldsymbol{v}_2^2-\boldsymbol{v}_1^2\right)+m_{球}\left(\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2\right)\cdot\boldsymbol{V}_0\end{aligned} \tag{69}$$

因此， 推广的功能原理（65）式最后化简为

$$\left(\frac{1}{2}kx_1^2-\frac{1}{2}kx_2^2\right)+m_{球}\left(\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2\right)\cdot\boldsymbol{V}_0=\frac{1}{2}m_{球}\left(\boldsymbol{v}_2^2-\boldsymbol{v}_1^2\right)+m_{球}\left(\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2\right)\cdot\boldsymbol{V}_0 \tag{70}$$

由此可见，推广的功能原理在车心参考系下的求解结果同地面参考系的守恒定律保持一致，这正是牛顿动力学的对称新方程及其推广的功能原理表达式在任意平动参考系下成立的普适性的体现。

6 总结

本文系统地介绍了牛顿动力学的对称新方程，实现了在任意平动参考系直接适用的适度相对性原理。 在牛顿力学的框架下，对称新方程是必然的严格推导的结果。在牛顿动力学的

传统体系（即牛顿第二定律）下对应于平动参考系引入的惯性力也因此得到了明确的理论计算表达式。惯性力的本质被揭示为参考物的经过质量平权后的真实受力。尽管质点动力学没有能够进一步拓展到任意运动（平动+转动）的参考系，但是上述对惯性力的定性解释是普适的。因为，不管质点动力学的微观因果关系是什么，实际可观测的运动学量必须相对实际的参考系来度量和描述，而参考系的加速运动直接且唯一取决于定义它的参考物的加速运动，进一步，参考物的加速运动直接且唯一取决于参考物的真实受力。因此，选定的参考系必须和对应的参考物的受力必须在质点动力学方程的两边保持因果的对称和一致，这是质点动力学的相对性原理推广的唯一正确的思路。

经典力学经验规律 $\Delta F = m\Delta a$ $\overset{\text{因果对称}}{\underset{\text{一致原理}}{\Rightarrow}}$	**惯性系：**	**理想情形，0个参考质点**	$F\big|_p = m_p a\big|_{p-\Sigma}$
	任意平动参考系：	**物理上直接取决于1个参考质点**	$\frac{F\big|_p}{m_p} - \frac{F\big|_o}{m_o} = a\big|_{p-o}$
	任意平动+转动参考系：	**物理上：直接取决于4个不共面质点**	**?(目前数学无法实现)**
		数学上：	$\frac{F\big|_p}{m_p} - \frac{F\big|_o}{m_o} = a\big|_{p-o} + 2\omega \times v\big|_{p-o} + \frac{d\omega}{dt} \times r\big|_{p-o} + \omega \times \left(\omega \times r\big|_{p-o}\right)$

感谢 感谢重庆大学郭磊教授，济南大学张宏升教授，北京工业大学曾定方教授，杭师大俞理教授，贺喜教授，朱吾明教授和本文作者的多次讨论；感谢李琛博士，杨焕雄老师，黄绍书老师和黄国龙老师的详细审稿并多次提出建设性意见；作者还特别感谢研修期间的指导老师沈有根研究员，李康教授和朱传界教授一直以来的支持和帮助

参考文献

[1] Zhou Yanbo， "Theoretical Mechanics" (Third Edition)， Higher Education Press，2009.
[2] Liu Liao, General Relativity (High Education Press, Shanghai, China), 1987, 26-30; 188-190.
[3] Zhang Sanhui， University Fundamental Physics， Tsinghua University Publishing House, 2009.
[4] 王增新，梁立孚，国内外对惯性力的讨论概述[J].哈尔滨船舶工程学院学报，1986，7(2). Wang Zengxin, Liang Lifu, An overview of the discussion on inertial force at home and abroad[J]. Journal of Harbin Institute of Marine Engineering, 1986, 7(2).
[5] 李康，杨建宋. 近代物理概论[M], 清华大学出版社, 2011:8. LI Kang, YANG Jiansong. Introduction to Modern Physics[M], Tsinghua University Publishing House, 2011:8.
[6] Steven. Weinberg “Gravitational and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity”(John Wiley & Sons, Inc, New York), 1972.
[7] Albert Einstein, Relativity: The Special and the General Theory (a popular exposition)，Crown Publishers, 1961.

[8] 梁立孚. 漫谈惯性力--与李民庆等同志商榷 [J]. 力学与实践, 1984, 6(4): 48-50. Liang Lifu. Discussion on inertial force with Li Minqing and other comrades [J]. Mechanics and Practice, 1984, 6(4): 48-50.
[9] 高炳坤. 漫谈惯性力[J]. 大学物理，2011，30(9): 22-23，30. Gao Bingkun. Talking about inertial force[J]. College Physics, 2011, 30(9): 22-23, 30.
[10] 唐宇婕. 认识惯性的过程与惯性定律 [J]. 力学与实践, 2007, 29(2): 84-87. Tang Yujie. The process of recognizing inertia and the law of inertia [J]. Mechanics and Practice, 2007, 29(2): 84-87.
[11] 李复, 高炳坤. 惯性定律不存在循环论证问题[J].大学物理，2005，24(4): 14-17. Li F, Gao BK. The law of inertia does not have a circular argument problem[J]. College Physics, 2005, 24(4): 14-17.
[12] ChiYi Chen, Journal of Zhejiang University (Science Edition),2014 Vol. 41 (5): 531-536. [陈驰一 2014 浙大学报理学版 41 5 531] The Realization of General Principle of Relativity in Particle Dynamics, hep-th/0312225 V9, 26 Nov 2012.
[13] Chen, Chi-Yi, Fundamental physics in the principle of relativity, ChinaXiv:202206.00038V3 (In English); ChiYi Chen， New Clue to the Principle of Relativity for Particle Dynamics, CSTR:32003.36.ChinaXiv.202201.00124.V3(in Chinese).
[14] ChiYi Chen, Relativistic Space-time Based on Absolute Background. arXiv:astro-ph/0502256v11.
[15] BIPM， Measurement Units， Unit Definitions, http://www.bipm.org/en/publications/si-brochure/second.html。
[16] Jaume Giné, On the Origin of the Inertial Force and Gravitation [J], Int J Theor Phys, 2011, 50: 607–617.
[17] H. J. Hay, et al." Measurement of the Red Shift in an accelerated System Using the Massbauer Effect in Fe"Phys. Rev. Letter 1960, 4, 165.
[18] 高炳坤，谢铁曾. 地球所受的一种易被忽视的惯性力[J].大学物理，1991，10(11): 46-47. Gao BK, Xie TZ. An easily neglected inertial force on the Earth[J]. College Physics, 1991, 10(11): 46-47.
[19] 大学物理编辑部. 机械能守恒定律和相对性原理[J]. 大学物理， 1999， 18(1): 18. University Physics Editorial Board. The law of conservation of mechanical energy and the principle of relativity[J]. College Physics, 1999, 18(1): 18.
[20] 高炳坤.“机械能守恒定律是否遵从相对性原理”辩[J]. 大学物理，2000，19(2): 20. Gao, Bingkun. "Whether the law of conservation of mechanical energy obeys the principle of relativity" [J]. College Physics, 2000, 19(2): 20.
[21] 高炳坤. 力学中一个令人费解的问题[J]. 大学物理，1995，14(5): 20-24. Gao, Bingkun. A puzzling problem in mechanics[J]. College Physics, 1995, 14(5): 20-24.

Classical Particle Dynamics Equation with Causal Symmetry *

Chi-Yi Chen[1)]

1) *(School of Physics, Hangzhou Normal University, Hangzhou, 310036, China)*

Abstract

In this paper, firstly, the real empirical law based on a large number of mechanical experiments is restored, from which the causality of the particle dynamics is obtained. Secondly, a symmetric new equation of particle dynamics is introduced in the framework of Newtonian dynamics using the basic idea of causal symmetry and consistency. The symmetric new equation is directly applicable to an arbitrary translational reference frame and is symmetrical because the investigated object and the reference object are placed on exactly equal status. The symmetric new equation degenerates to Newton's second law when the real force acting on the reference object is constant zero, and just at that time, the reference frame corresponds to an inertial frame of reference. Since the acceleration of any reference frame depends directly on the acceleration of its reference object, and the acceleration of the reference object depends directly on the forces acting on the reference object, the nature of the inertial force is revealed to be the real force acting on the reference object after the mass equalization. This qualitative interpretation of the inertial force is universal. As for the translational reference frame, the qualitative interpretation of the inertial force can be further demonstrated by a specific theoretical computational expression. The theoretical analysis shows that the symmetric new equation can also be naturally integrated into the theoretical framework of classical mechanics and is more in line with experimental and empirical laws than Newton's second law, as long as the total force acting on the investigated object is replaced by the relative force between the investigated object and the reference object. Finally, on this basis, we demonstrate the advantages of the symmetric new equation in practical applications through seven specific examples in a comprehensive manner.

Keywords: Newtonian dynamics; symmetric new equation; inertial force; the moderate principle of relativity

PACS： 98.80.-k, 95.10.-a

* Project supported by the Nature Science Foundation of Zhejiang Province (Grant No. Y6110778)